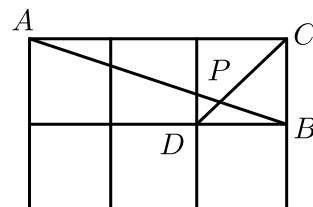


第2讲 格点问题进阶（练习）

1. 如图，在边长相同的小正方形组成的网格中，点 A, B, C, D 都在这些小正方形的顶点上， AB, CD 相交于点 P ，则：



- (1) $\frac{AP}{PB}$ 的值 = ____ .
 (2) $\tan \angle APD$ 的值是 ____ .

【答案】 (1) 3

(2) 2

【解析】 (1) 如图1，由图形知， $AC \parallel BD$ ，

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle BDP,$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BD} = 3.$$

故答案为：3.

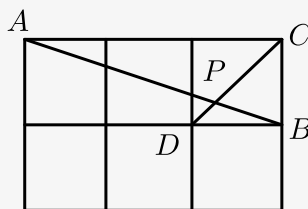


图 1

(2) 如图2，连接 BE ，

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是正方形，

$$\therefore DF = CF = \frac{1}{2}CD,$$

$$BF = \frac{1}{2}BE, CD = BE,$$

$BE \perp CD$,

$$\therefore BF = CF,$$

根据题意得： $AC \parallel BD$ ，

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle BDP,$$

$$\therefore DP : CP = BD : AC = 1 : 3$$

$$\therefore DP : DF = 1 : 2,$$

$$\therefore DP = PF = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}BF,$$

在 $\text{Rt}\triangle PBF$ 中， $\tan \angle BPF = \frac{BF}{PF} = 2$ ，

$$\therefore \angle APD = \angle BPF,$$

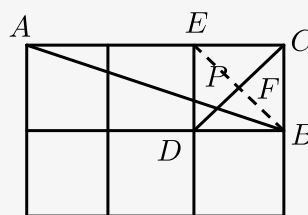


图 2

$$\therefore \tan \angle APD = 2 .$$

故答案为：2 .

【标注】【知识点】探究一般角的三角函数的值

2. 如图所示，在 4×4 的正方形网格中，点 A, B 都在格点上，连接 AB . 请仅用无刻度的直尺分别按照下列要求作图 .

(1) 在图1中，作出一个 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，使 $\tan A = 1$.

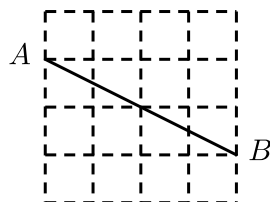


图1

(2) 在图2中，作出一个 $\text{Rt}\triangle ABD$ ，使 $\tan A = \frac{1}{3}$.

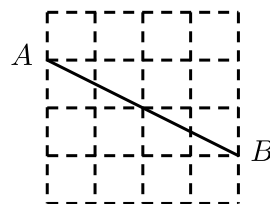
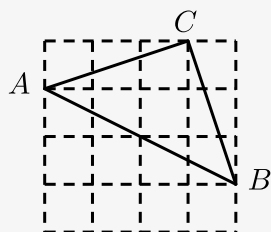


图2

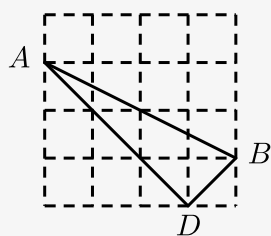
【答案】(1) 画图见解析 .

(2) 画图见解析 .

【解析】(1) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 即为所求（答案不唯一） .



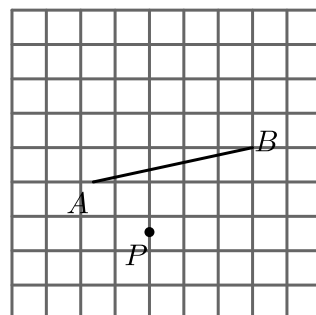
(2) 如图， $\text{Rt}\triangle ABD$ 即为所求 .



【标注】【能力】分析和解决问题能力

【知识点】勾股定理

3. 如图所示，在每个边长都为1的小正方形组成的网格中，点 A ， P 分别为小正方形的边的中点， B 为格点。



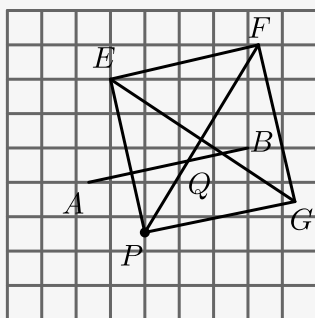
- (1) 线段 AB 的长度等于 _____ .
- (2) 在线段 AB 上存在一个点 Q ，使得点 Q 满足 $\angle PQA = 45^\circ$ ，请你借助给定的网格，并利用无刻度的直尺作出 $\angle PQA$ ，并简要说明你是怎么找到点 Q 的（不要求证明）。

【答案】(1) $\frac{\sqrt{85}}{2}$

(2) 构造正方形 $EFGP$ ，连接 PF 交 AB 于点 Q ，点 Q 即为所求。

【解析】(1) 构建勾股定理可知 $AB = \sqrt{1^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{85}}{2}$ ，
故答案为： $\frac{\sqrt{85}}{2}$ 。

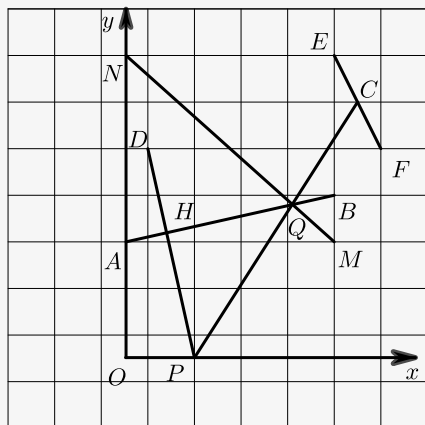
(2) 方法一：如图点 Q 即为所求，



构造正方形 $EFGP$ ，连接 PF 交 AB 于点 Q ，点 Q 即为所求，

故答案为：构造正方形 $EFGP$ ，连接 PF 交 AB 于点 Q ，点 Q 即为所求。

方法二：构造：取格点 E 、 F ，连接 EF 交格线于 C ，连接 PC 交 AB 于点 Q ，即为所求。



思路1：作垂线 $PD \perp AB$ 于 H ，计算长度建立坐标系：

$$P\left(\frac{3}{2}, 0\right), D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right), A\left(0, \frac{5}{2}\right), B\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right),$$

$$\text{直线} AB: y = \frac{2}{9}x + \frac{5}{2},$$

$$\text{直线} PD: y = -\frac{9}{2}x + \frac{27}{4},$$

$$\text{联立解得点} H \text{横坐标 } x_H = \frac{9}{10},$$

$$\text{设 } AB = PD = a,$$

$$\text{则 } AH = \frac{1}{5}a, PH = \frac{3}{5}a,$$

$$\text{故 } QH = PH = \frac{3}{5}a, BQ = \frac{1}{5}a, \text{取 } BM = 1, AN = 4 \text{即可划分比例继续得到点} Q.$$

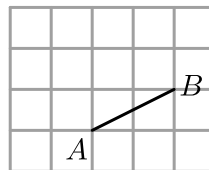
$$\text{思路2：正切差角公式：} \tan \angle PQA = \frac{k_{PQ} - k_{AB}}{1 + k_{PQ} \cdot k_{AB}}, \text{代入 } k_{AB} = \frac{2}{9}, \text{求得：} k_{PQ} = \frac{11}{7}.$$

网格不够，缩小一半，故将点 P 右移3.5个单位，上移5.5个单位得到点 C ，连接即可。

思路3：构造等腰直角三角形 PDC ，利用同位角即可。

【标注】【知识点】作图依据

4. 如图，在每个小正方形的边长为1的网格中， A 、 B 为格点。



(1) AB 的长等于 _____。

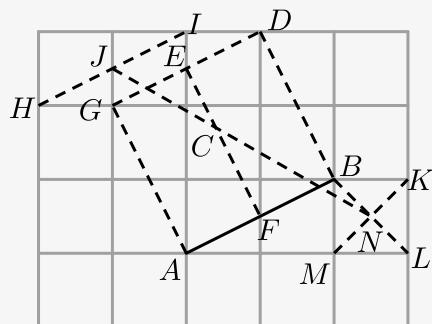
(2) 请用无刻度的直尺，在如图所示的网格中求作一点 C ，使得 $CA = CB$ 且 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\frac{3}{2}$ ，并简要说明点 C 的位置是如何找到的 _____。

【答案】 (1) $\sqrt{5}$

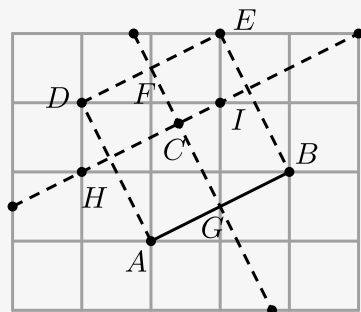
- (2) 取格点 G 、 D ，连结 AG 、 GD 、 BD ，设 DG 与网格线交于点 E ，设 AB 与网格线交于点 F ，连结 EF ，取格点 H 、 I ，连结 HI 与网格线交于点 J ，取格点 K 、 L 、 M ，连结 BL 、 MK 交于点 N ，连结 JN 与 EF 交于点 C ，点 C 即为所求。

【解析】(1) $AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 。

- (2) 方法一：取格点 G 、 D ，连结 AG 、 GD 、 BD ，设 DG 与网格线交于点 E ，设 AB 与网格线交于点 F ，连结 EF ，取格点 H 、 I ，连结 HI 与网格线交于点 J ，取格点 K 、 L 、 M ，连结 BL 、 MK 交于点 N ，连结 JN 与 EF 交于点 C ，点 C 即为所求。

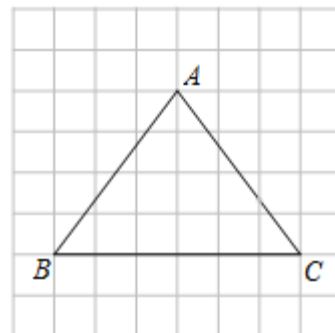


方法二：如图取格点 D 、 E ，连接 AD 、 DE 、 EB ，取交点 F 、 G ，连接 FG (FG 为 AB 的中垂线)(使得 $S_{\triangle PAB} = \frac{3}{2}$)，取点 H 、 I (使得 $S_{HAB} = \frac{3}{2}$)，连接 HI ， HI 与 FG 交点为 C ，点 C 即为所求。



【标注】【知识点】作图依据

5. 如图，将 $\triangle ABC$ 放在每个小正方形的边长为1的网格中，点 A 、 B 、 C 均落在格点上。



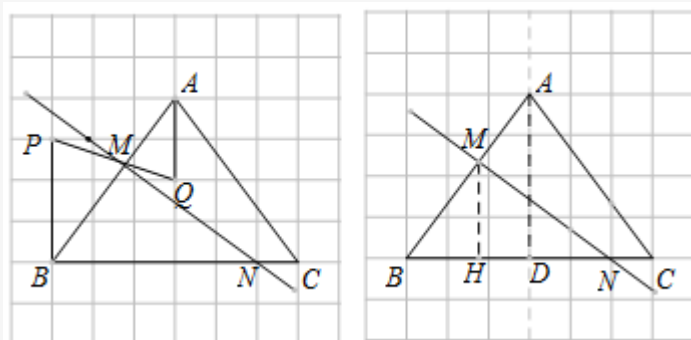
- (1) $\triangle ABC$ 的周长等于_____.
- (2) 点 M 在线段 AB 上 (点 M 与 A 、 B 不重合), 点 N 在线段 BC 上 (点 N 与 B 、 C 不重合), 若直线 MN 恰好将 $\triangle ABC$ 的周长和面积都平分, 请在如图所示的网格中, 用无刻度的直尺画出直线 MN , 并简要说明点 M 和点 N 是如何找到的 (不要求证明).

【答案】 (1) 16

- (2) 如图, 取格点 P 、 Q , 使 $BP = 3$, $AQ = 2$, 连接 PQ 与 AB 交于点 M , 在 BC 上取格点 N , 使 $BN = 5$, 作直线 MN 即为所求.

【解析】 (1) $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $BC = 6$
 $\triangle ABC$ 的周长 $5 + 5 + 6 = 16$.

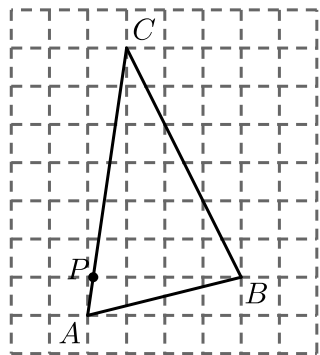
- (2) 如右图, 取 BC 的中点 D , 连接 AD , 作 $MN \perp BC$ 于 H .



$$\begin{aligned} \text{设 } BN = x, \text{ 则 } BM = 8 - x, \\ \therefore \frac{MH}{AD} = \frac{BM}{BA}, \\ \therefore MH = \frac{4}{5}(8 - x). \\ \therefore S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2}BN \cdot MH = \frac{1}{2}x \cdot \frac{4}{5}(8 - x) = 6, \\ \therefore x = 5 \text{ 或 } x = 3 \text{ (} M \text{ 与 } A \text{ 重合, 舍)} \\ \therefore BN = 5, BM = 3. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】比例的综合应用

6. 如图, 在每个小正方形的边长为1的网格中, 点 A , B , C 均在格点上.



(1) AC 的长等于 ____ .

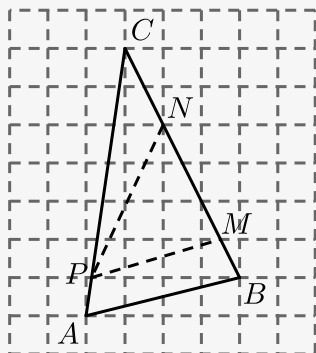
(2) 若 AC 边与网格线的交点为 P ，请找出两条过点 P 的直线来三等分 $\triangle ABC$ 的面积，请在如图所示的网格中，用无刻度的直尺，画出这两条直线，并简要说明这两条直线的位置是如何找到的（不要求证明）.

【答案】 (1) $\sqrt{37}$

(2) 画图见解析 .

【解析】 (1) $AC = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$.

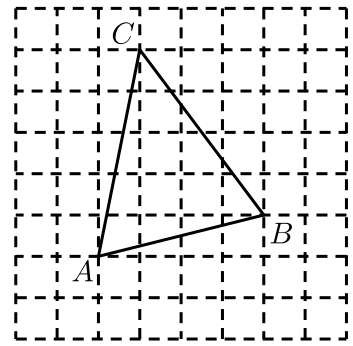
(2) 如图，取 BC 与网格线交点 M ， N ，作直线 PM ， PN ，即为所求 .



【标注】【知识点】勾股定理应用

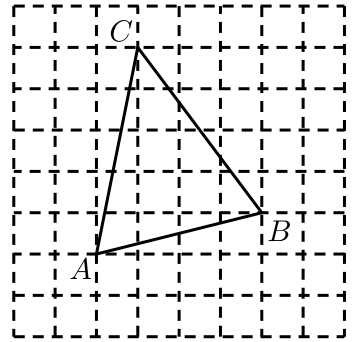
7. 如图，网格中小正方形的边长均为1， $\triangle ABC$ 是格点三角形（三角形的顶点都在格点上），请仅用无刻度的直尺作图 .

(1) 在图①中作出格点 M ，使 $S_{\triangle MAB} = S_{\triangle ABC}$.



图①

(2) 请在图②的 $\triangle ABC$ 内部作出点 P ，使其满足 $S_{\triangle PAB} : S_{\triangle PBC} = 1 : 2$.

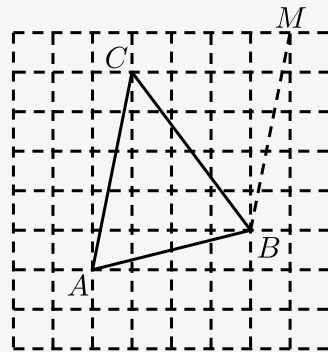


图②

【答案】(1) 画图见解析 .

(2) 画图见解析 .

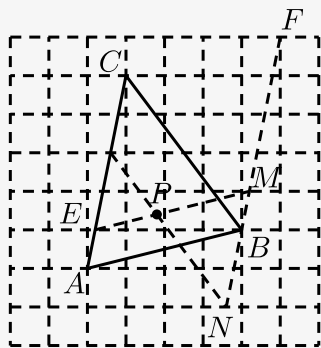
【解析】(1) 如图①所示，



图①

点 M 即为所求 .

(2) 如图②，

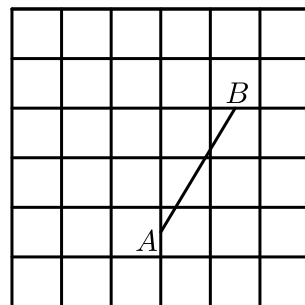


图②

点P即为所求．

【标注】【知识点】勾股定理

8. 如图，在边长均为1的小正方形组成的网格中，点A，B分别为小正方形一边的中点，



- (1) 线段AB的长等于 _____ ．
 (2) 请你在网格中的空白处（非网格线上）求作一点C，使得点C满足 $AC = AB$ ，请你借助网格和无刻度直尺，作一个满足这样条件的点即可，并简要说明你是怎么作的： _____ ．

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{34}}{2}$

(2) 画图见解析，证明见解析

【解析】 (1) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ ．

(2) 取格点X，Y，J，R，

连接XY，JR，

得点E，D，

连接ED，AD，

取点P，K，Q，M，E，N，

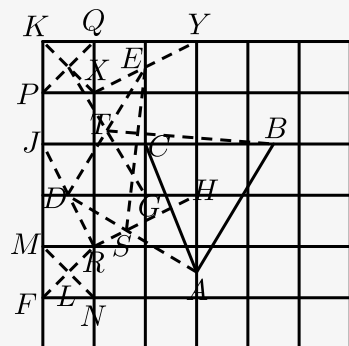
连接MN，RE，

得点L，

取格点G，H，

连接PK，KX，

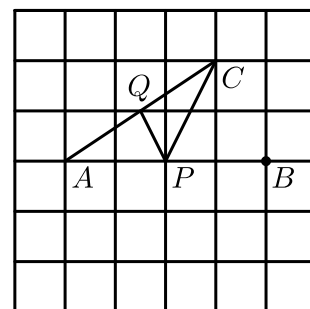
得点 F ，
 连接 GF ， HL ，
 分别与 DE ， DA ，
 相交于点 T ， S ，
 连接 BT ， ES ，
 相交于点 C ，
 连接 AC ，
 AC 即为所求．



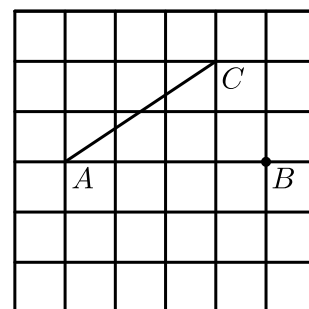
【标注】【知识点】勾股定理表示无理数

9. 在每个小正方形的边长为1的网格中，点 A ， B ， C 均在格点上，点 P ， Q 分别为线段 AB ， AC 上的动点．

(1) 如图，当点 P ， Q 分别为 AB ， AC 中点时， $PC + PQ$ 的值为 _____ ．



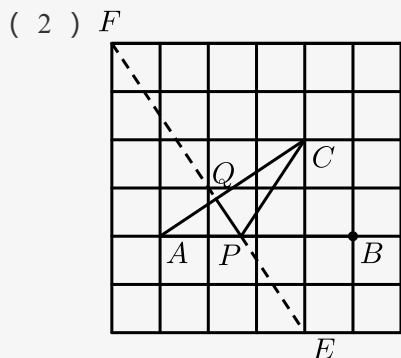
(2) 当 $PC + PQ$ 取得最小值时，在如图所示的网格中，用无刻度的直尺，画出线段 PC ， PQ ，简要说明点 P 和点 Q 的位置是如何找到的 _____ ．



【答案】(1) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

(2) 如图所示，取格点 E, F ，连接 EF 交 AB 于点 P ，交 AC 于点 Q 。此时， $PC + PQ$ 最短

【解析】(1) $\because PQ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ， $PC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，
 $\therefore PQ + PC = \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ 。

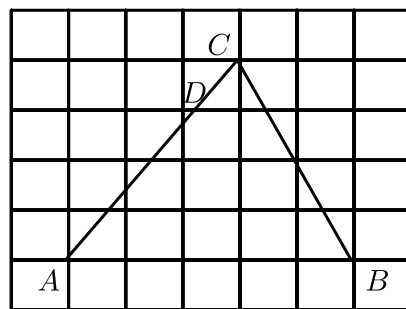


【标注】【能力】分析和解决问题能力

【知识点】轴对称的定义

【知识点】勾股定理与实际问题

10. 如图，在每个小正方形的边长为1的网格中，点 A, B, C 均在格点上， AC 与网格线交于点 D ，点 P, Q 分别为线段 BC, AB 上的动点。



(1) 线段 CD 的长为 _____。

(2) 当 $PD + PQ$ 取得最小值时，用无刻度的直尺，画出线段 PD, PQ ，并简要说明点 P 和点 Q 的位置是如何找到的 _____。

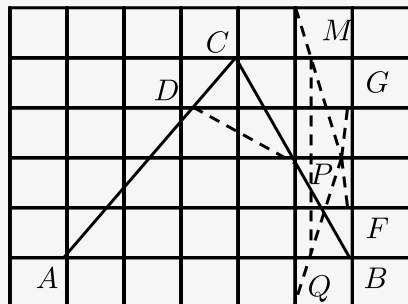
【答案】(1) $\frac{5}{4}$

(2) 如图所示，取格点 E, F ， EF 与网格线交与点 M ，取格点 G, H ， GH 与网格线交与点 Q ， MQ 与 BC 交与点 P ，连接 PD ，此时 $PD + PQ$ 最短。

【解析】(1) 由题知， $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

由相似可知 $\frac{CD}{AC} = \frac{1}{4}$,
得 $CD = \frac{4}{5}$.

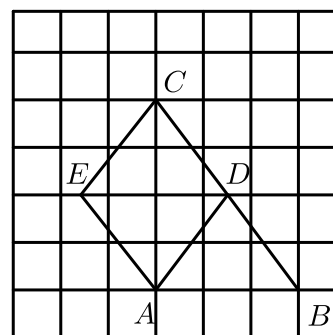
- (2) 如图所示 , 取格点 E, F , EF 与网格线交与点 M ,
取格点 G, H , GH 与网格线交与点 Q ,
 MQ 与 BC 交与点 P ,
连接 PD , 此时 $PD + PQ$ 最短 .



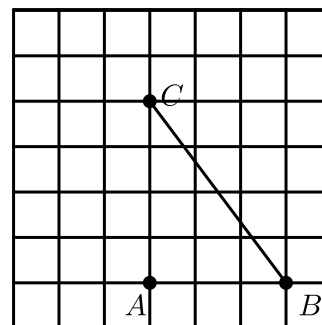
【标注】【知识点】线段和的最小值

11. 在每个小正方形的边长为1的网格中 , 点 A, B, C 均在格点上 , D 是 BC 上的一个动点 .

- (1) 如图1 , 若以 AD, CD 为邻边画平行四边形 $ADCE$, 则当 D 是 BC 中点是 , 对角线 DE 的长是 ____ .



- (2) 若以 AD, CD 为邻边画平行四边形 $ADCE$, 当 DE 长取最小值时 , 在图2中用无刻度的直尺画出点 D 和点 E , 并简要说明点 D, E 的位置是如何找到的 ____ .



【答案】(1) 3

(2) 顺次连接 AD , DC , CE , EA , 此时平行四边形为所求.

【解析】(1) $\because D$ 是 BC 中点,

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2},$$

又 $\because \triangle OCD \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{OD}{AB} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又} \because \frac{OD}{DE} = \frac{1}{2},$$

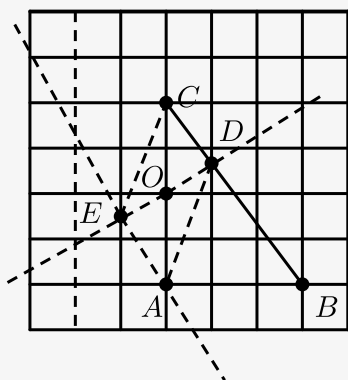
$$\therefore AB = DE = 3,$$

$$\therefore DE = 3.$$

(2) 找 AC 中点 O , 过 O 作 $OD \perp BC$, 交 BC 于点 D .

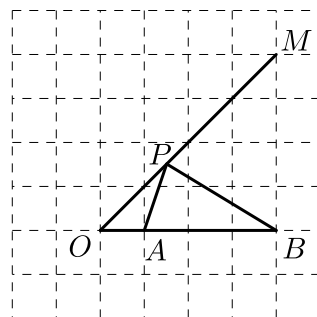
过 A 作 $AM \parallel BC$, 交 OD 直线于点 E ,

顺次连接 AD , DC , CE , EA , 此时平行四边形为所求.



【标注】【知识点】网格中的三角形相似

12. 如图, 是由每个边长都是1的小正方形构成的网格, 点 O , A , B , M 均为格点, P 为线段 OM 上的一个动点.



(1) 点 B 到 OM 的距离等于 ____.

(2) 当点 P 在线段 OM 上运动, 且使 $PA^2 + PB^2$ 取得最小值时, 请借助网格和无刻度的直尺, 在给定的网格中画出点 P 的位置, 并简要说明你是怎么画的.

【答案】(1) $2\sqrt{2}$

(2) 答案见解析.

【解析】(1) 点B到OM的距离 = $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

(2) 以点O为原点建立直角坐标系, 则A(1, 0), B(4, 0),

设P(a, a), $0 \leq a \leq 4$,

$$\therefore PA^2 = (a-1)^2 + a^2, PB^2 = (a-4)^2 + a^2,$$

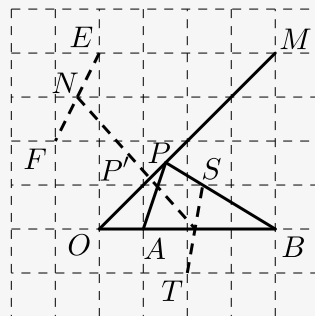
$$\therefore PA^2 + PB^2 = 4\left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{43}{4},$$

$\therefore 0 \leq a \leq 4$,

$\therefore$ 当 $a = \frac{5}{4}$ 时, $PA^2 + PB^2$ 取得最小值 $\frac{43}{4}$,

综上, 需作出点P满足线段OP的长 = $\frac{5\sqrt{2}}{4}$;

取格点F, E, 连接EF, 得到点N, 取格点S, T, 连接ST, 得到点R, 连接NR交OM于P, 则点P即为所求.



【标注】【知识点】直角三角形的定义